Απ1 No. Date 10/1/2017

Κανόνας L' Hospital I

Θα μελετήσουμε όρια $x \to a^+$ με $a \in \mathbb{R}$ ή $a = -\infty$ (τα όρια $x \to a^-$, $x \to a$ ανάλογα)

Θ. L' Hospital

Έστω $-\infty \leq a < b \leq \infty$ και f, g διαφορ. στο (a,b) με $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ και ότι $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$

(a) Εαν $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

(b) Εαν $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\} \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

* Το γεγονός ότι $g'(x) \neq 0$ στο (a, b) εξασφαλίζει ότι η $g(x) \neq 0$ για $x \in (a, a+\delta)$.

* Αν το $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, δεν βγάζω κανένα συμπέρασμα για το $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$

Απόδειξη

Εαν $a < \alpha < \beta < b$ το Θ. Rolle μας δίνει $g(\beta) \neq g(\alpha)$ (διότι $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$)

Από το Θ.Μ.Τ. του Cauchy $\exists u \in (\alpha, \beta)$ τ.ω.

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)} \quad (1)$$

Περίπτωση (a) δηλ. $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ Έστω $\epsilon > 0$

$\exists c \in (a, b)$ τ.ω. $L - \epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \epsilon$ $\forall x \in (a, c)$ (2)

*Αν το $a = -\infty$ το c θα ήταν $-M$ με $M >>>$

*Αν $a \in \mathbb{R}$ το $c = a + \delta$

No. Date (3)

Από (1) $\rightsquigarrow$ $L-\epsilon < \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} < L+\epsilon$ $\forall \alpha, \beta$ με $0<\alpha<\beta\leq c$

(με $\beta<c$)

Στην (3) αφήνουμε $\alpha \to a^+ \Rightarrow L-\epsilon \leq \dfrac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq L+\epsilon$

Άρα $\forall \epsilon$ $\exists c$ έτσι ώστε να ισχύει $\forall \beta \in (a, c]$

Εφαρμογή: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\overset{1}{\sin x}\,\overset{0}{\sqrt{x}}}{x} = 0.$ ← Χωρίς L' Hospital

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\cdot\cos x = 0$

Εφαρμόζω L' Hospital

οι $\sin x, \sqrt{x}$ διαφορίσιμες για $x>0$.

η $\sqrt{x}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο 0 άρα ο απλός L' Hospital δεν εφαρμόζεται.

Επίσης $g'(x) \neq 0$ $x>0$.

Εφαρμογή: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}\,DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}\,DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}.$

Για $x\neq 0$ $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x} \to \dfrac{1}{2}$ καθώς $x\to 0$

Εφαρμογή: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} \overset{\frac{0}{0}\,DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1.$

Εφαρμογή: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}\,DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{2x} = \dfrac{1}{2}$

No. Date

Εφαρμογή: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{\frac{0}{0}\ DLH}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

L' Hospital II

Έστω $-\infty \le a < b \le \infty$ f,g διαφορ. στο (a,b) με $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Υποθ. ότι $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$

(a) Αν $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

(b) Αν $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\} \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

*Αλλά έχω άπειρο στον παρανομαστή είμαι σε θέση να κάνω L'Hospital

Εφαρμογή: • $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

• $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Άσκηση (Για σπίτι): $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1000}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1000 \cdot x^{999}}{e^x}$

Υπόδειξη: $\frac{x^{1000}}{e^x} = \left(\frac{x}{e^{\frac{x}{1000}}}\right)^{100}$ θέτω $u = \frac{x}{1000}$.

• $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \cos x = 1$

No. Date

Γλώσσα

Θεωρητική Άσκηση

Έστω f διαφορ. στο $(0,+\infty)$ με $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x))=L\in\mathbb{R}$

Ν.Δ.Ο. $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ και $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$

Υπόδειξη: $f(x)=\dfrac{e^x f(x)}{e^x}$

Άλλες απροσδιόριστες Μορφές

$+\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$

Άσκηση: $I=(0,\frac{\pi}{2})$ $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin}\right)\overset{+\infty-\infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x-x}{x\sin x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\frac{1}{x}\to+\infty$, $\frac{1}{\sin}\to+\infty$

$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}\right)=0$

- $I=(0,\infty)$ $\lim_{x\to 0^+} x\ln x\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$

- $I=(0,\infty)$ $\lim_{x\to 0^+} x^x\overset{0^0}{=}\lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}\overset{\text{θέτω } t=x\ln x}{=\!=}$

$=\lim_{t\to 0} e^t$

- $I=(1,\infty)$ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\neq e \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e\ \forall a_n\to\infty$

$\overset{1^\infty}{=}\lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$

No. Date

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}\left(-x^{-2}\right)}{-x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Άρα $\lim_{t\to 1} e^{t} = e^{1} = e.$

<u>Άσκηση (Για Σπίτι)</u>: $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sin x}$ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cos x}{x}$ $(0,\pi)$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(\ln x)^2}$

<u>Λύσεις σε παλιές Ασκήσεις</u>

① $e^{x} \geq x+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Θέτουμε $f(x)=e^{x}$

Αν $x>0$ κάνω ΘΜΤ. στο $[0,x]$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$ για κάποιο $c\in(0,x)$

$\frac{e^{x}-e^{0}}{x-0} = e^{c} > e^{0} = 1 \rightsquigarrow \frac{e^{x}-1}{x} > 1$

Για $x<0$ ΘΜΤ. στο $[x,0]$

② $(1+x)^{a} \geq 1+ax, \quad \forall x>-1$

$f(x) = (1-x)^{a}$

(i) Για $x=0$ ισχύει ως ισότητα

(ii) Για $x>0$ Θ.ΜΤ. στο $[0,x]$: $\exists c\in(0,x)$ τ.ω.

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$

No. Date

H f είναι διαφορίσιμη για $x \neq -1$.

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = a \cdot (1+c)^{a-1}$$

$c \in (0, x)$

$$\rightsquigarrow a(1+c)^{a-1} > a \cdot 1^{a-1} = a$$

$$1+c > 1 \rightsquigarrow (1+c)^{a-1} > 1^{a-1} = 1$$

$$\rightsquigarrow \frac{(1-x)^a - 1}{x} \geq a$$

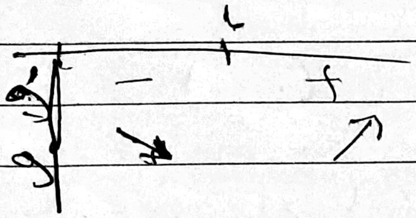
Για σπίτι: Να κάνω την περίπτωση $x<0$

③ $0<a<1$

$g(x) = ax - x^a \quad x \geq 0$

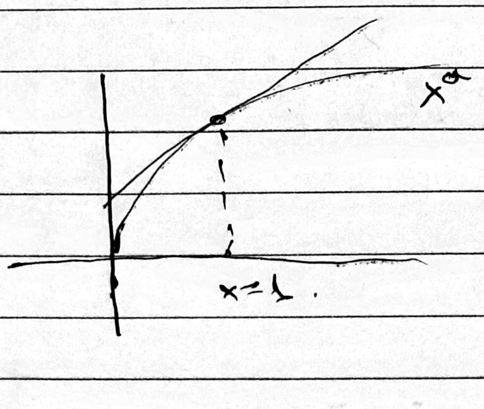
$g'(x) = a(1 - x^{a-1}) \rightsquigarrow g'(x) < 0$ για $0<x<1$

$g'(x) > 0$ για $x>1$



δηλ. $g(x) \geq g(1) = a-1 \ \forall x > 0$.

$$\rightsquigarrow x^a \leq ax + (1-a) \quad \forall x \geq 0$$



Θέτουμε $x = \frac{a}{b}$ $\quad a, b > 0$

$$\rightsquigarrow a^a b^{1-a} \leq a \cdot a + (1-a) b$$